PART4　等比数列の和

例題

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 3，公比 2　　(ii)　初項 27，公比 $\frac{1}{3}$

(2)　初項 16，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列の第 6 項から第 10 項までの和を求めよ。

Point Pickup

練習

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 1，公比 3　　　(ii)　初項 81，公比 $\dfrac{1}{4}$

(2)　初項 2，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列の第 3 項から第 6 項までの和を求めよ。

第1講　PART4 確認問題

1　初項8，公比3の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{ア}}\left(\boxed{\text{イ}}^{n}-1\right)$$

である。

2　初項15，公比 -2 の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$$S_n = \boxed{\text{ウ}}\left\{1-\left(\boxed{\text{エオ}}\right)^{n}\right\}$$

である。

3　初項20，公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列 $\{a_n\}$ の第5項から第10項までの和は $\dfrac{\boxed{\text{カキク}}}{\boxed{\text{ケコサ}}}$ である。

PART4　等比数列の和

例題

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 3，公比 2　　(ii)　初項 27，公比 $\dfrac{1}{3}$

(2)　初項 16，公比 $\dfrac{1}{2}$ の等比数列の第 6 項から第 10 項までの和を求めよ。

(1) (i)　$S_n=\dfrac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

(ii)　$S_n=\dfrac{27\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}\cdot 27\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=\dfrac{81}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

(2)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot 16\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=32\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

求める和は $S_{10}-S_5=32\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}-32\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}=2^5\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}-1+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\right\}$

$$=2^5\left(-\frac{1}{2^{10}}+\frac{1}{2^5}\right)$$

$$=-\frac{1}{2^5}+\frac{2^5}{2^5}$$

$$=-\frac{1}{32}+\frac{32}{32}=\frac{31}{32}$$

(別解)

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

求める和は，初項 $a_6=16\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$，項数 $10-6+1=5$ の等比数列の和より

$$\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{31}{32}=\frac{31}{32}$$

練習

(1)　次の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(i)　初項 1，公比 3　　(ii)　初項 81，公比 $\frac{1}{4}$

(2)　初項 2，公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列の第 3 項から第 6 項までの和を求めよ。

(1) (i)　$S_n=\dfrac{1\cdot(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

(ii)　$S_n=\dfrac{81\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}\cdot 81\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}=108\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}$

(2)　この数列の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{2\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot 2\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$$

求める和は $S_6-S_2=\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^6\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2\right\}=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{3^6}-1+\dfrac{1}{3^2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-1+3^4}{3^5}$$

$$=\frac{40}{3^5}=\frac{40}{243}$$

(別解)

この数列の一般項を a_n とすると　$a_n=2\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

求める和は，初項 $a_3=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$，公比 $-\frac{1}{3}$，項数 $6-3+1=4$ の等比数列の和より

$$\frac{\frac{2}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^4\right\}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{80}{81}=\frac{40}{243}$$

第1講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イ：3

[解説]

初項が 8，公比が 3 であるから

$$S_n=\frac{8(3^n-1)}{3-1}\ \text{[A]}$$

$$=4(3^n-1)$$

[A]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，
$r \neq 1$ のとき

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

2 **[正解]** ウ：5，エオ：-2

[解説]

初項が 15，公比が -2 であるから

$$S_n=\frac{15\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}\ \text{[B]}$$

$$=5\{1-(-2)^n\}$$

[B]　公比 r が $r<1$ のときは，
$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ を使うと，分母が正になって計算しやすい。

3 [正解] カキク：315，ケコサ：128

[解説]

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$$S_n=\frac{20\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot20\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$ [C]

$$=40-\frac{40}{2^n}$$

[C]　まずは初項から第 n 項までの和を n の式で表す。

求める和は

$$S_{10}-S_4=\left(40-\frac{40}{2^{10}}\right)-\left(40-\frac{40}{2^4}\right)$$ [D]

$$=-\frac{5}{2^7}+\frac{5}{2}$$

$$=\frac{5(2^6-1)}{2^7}=\boldsymbol{\frac{315}{128}}$$

[D]　求める和は，$a_1+a_2+\cdots+a_{10}$ から $a_1+a_2+a_3+a_4$ を引いたものである。

（別解）

等比数列の第 n 項を a_n とすると

$$a_n=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_5=20\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{4}$$

求める和は，初項 $\frac{5}{4}$，公比 $\frac{1}{2}$，項数

$10-5+1=6$ の等比数列の和であるから [E]

$$\frac{\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{2^6}\right)$$

$$=\frac{5}{2}\cdot\frac{63}{64}$$

$$=\boldsymbol{\frac{315}{128}}$$

[E]　和 $a_5+a_6+\cdots+a_{10}$ を a_5 を初項とする等比数列の和とみて求める。